

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА



РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2015
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ
ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Бумажные карты и атласы звездного неба и нанесенные на них объекты»

Условие. Какие из приведенных небесных тел и их систем (одиночная звезда, Солнце, двойная звезда, планета, Луна, переменная звезда, астероид, звездное скопление, комета, туманность) традиционно не изображают на бумажных картах и атласах звездного неба? Почему их не изображают? (3 балла).

Решение:

На картах и атласах звездного неба традиционно изображают такие объекты как *одиночная звезда, двойная звезда, переменная звезда, звездное скопление, туманность*. Данные объекты удалены от Земли на очень большие расстояния и, несмотря на наличие у этих тел значительных скоростей, они очень медленно изменяют свое положение в пространстве (очень малые собственные движения), с точки зрения земного наблюдателя, следовательно, и их экваториальные координаты (которыми традиционно задают положение тел на карте) не меняются длительное время (годы, десятки лет, столетия).

Тела Солнечной системы (Солнце, Луна, планеты, астероиды, кометы) находятся по отношению к земному наблюдателю гораздо ближе, нежели выше указанные объекты, причем движутся относительно Земли приблизительно с такими же скоростями (по порядку величины). Следовательно, их перемещение по небосводу (собственное движение) должно быть существенно больше. Поэтому их экваториальные координаты будут значительно изменяться на протяжении нескольких дней, недель, месяцев.

Поскольку бумажные карты и атласы печатают с целью их использования любителями астрономии продолжительное время – месяцы-годы, то изображение на них тел Солнечной системы теряет всякий смысл, ибо в каждую конкретную дату и время у данных тел на карте будет свое положение. Все эти положения на карте изобразить физически невозможно, поэтому их традиционно не изображают.

Ответ: на бумажных картах и атласах звездного неба традиционно не изображают Солнце, Луну, планеты, астероиды, кометы и другие тела Солнечной системы; причина – их быстрое перемещение (большое собственное движение) по небосводу в силу относительной близости и, как следствие, быстрое изменение экваториальных координат, которыми и задаются положения тел на карте. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Пересечение звездой горизонта»

В момент времени $t = 0^{\text{h}}02^{\text{m}}$ по Самарскому времени наблюдается восход некоторой звезды. Сколько еще раз данная звезда пересечет горизонт в данном пункте, в данные сутки? (3 балла).

Решение:

Как известно, Земля делает один полный оборот вокруг оси относительно неподвижных звезд за одни *звездные сутки*, т.е. за 23 часа 56 минут. Т.о. звездные сутки короче солнечных (которыми мы измеряем время в быту) на 4 минуты. Поэтому данная звезда за данные сутки успеет зайти за горизонт и вновь взойти в 23 часа 58 минут по местному времени, то есть пересечет горизонт еще дважды. Возможен также частный случай, когда за оставшиеся две минуты звезда пойдет обратно за горизонт – в этом случае 3 раза.

Ответ: 2 или 3 раза. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Астрономическая мозаика»

Условие. На рис. 1 представлена «Астрономическая мозаика» – система изображений различных объектов видимой части Вселенной. Определите типы данных объектов. Как называются

данные объекты? (0.5 балла за каждый правильно названный тип объекта и 0.5 балла за каждое правильно сопоставленное объекту название).

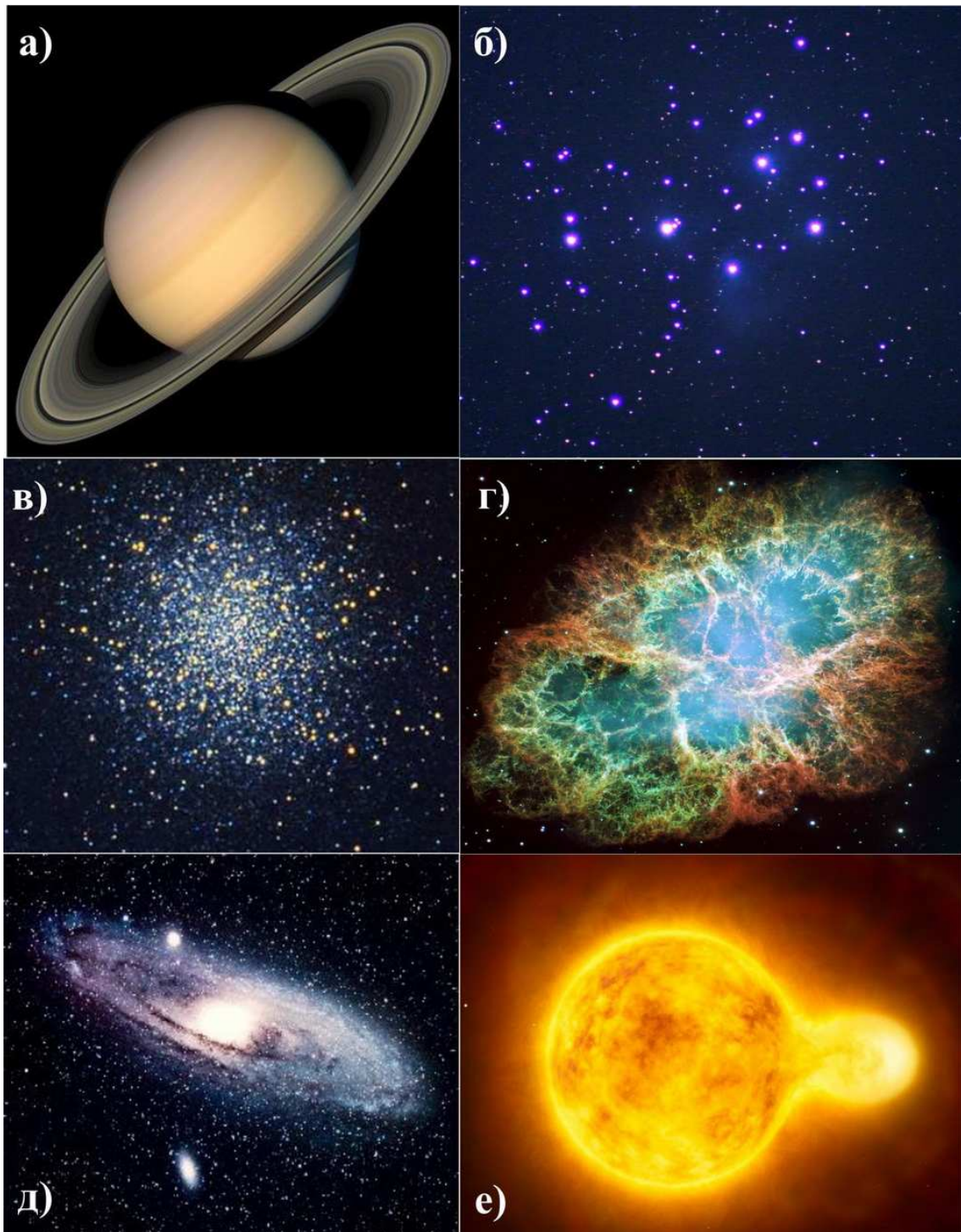


Рис. 1: Изображения различных астрономических объектов.

Решение:

На данных рисунках представлены объекты, типы которых и названия представлены в таблице 1.

($S_{\max} = 6$ баллов).

Рис-к	Тип	Балл	Название	Балл	Рис-к	Тип	Балл	Название	Балл
1.а)	Планета	0.5	Сатурн	0.5	1.б)	Рассеянное скопление	0.5	Плеяды	0.5
1.в)	шаровое скопление	0.5	M13	0.5	1.г)	Остаток сверхновой (туманность)	0.5	Крабовидная туманность	0.5
1.д)	Галактика (спиральная)	0.5	M31 (NGC 224)	0.5	1.е)	Тесная двойная звезда	0.5	V766 Centauri (HD 119796, HR 5171)	0.5

Таблица 1: Типы и названия представленных объектов, а также баллы, начисляемые за правильный ответ.

Задача № 4. «Конфигурации Земли и Сатурна»

Условие. В некоторый момент времени для земного наблюдателя Сатурн оказался в западной квадратуре. В какой конфигурации будет находиться Земля для гипотетического наблюдателя, находящегося в этот момент в окрестности Сатурна? (4 балла).

Решение:

Изобразим взаимное расположение Солнца, Земли и Сатурна (см. рис. 2) в случае, когда последний находится в западной квадратуре для земного наблюдателя (Сатурн отстоит по правую руку на 90° от направления на Солнце, для наблюдателя обращенного к нему лицом).

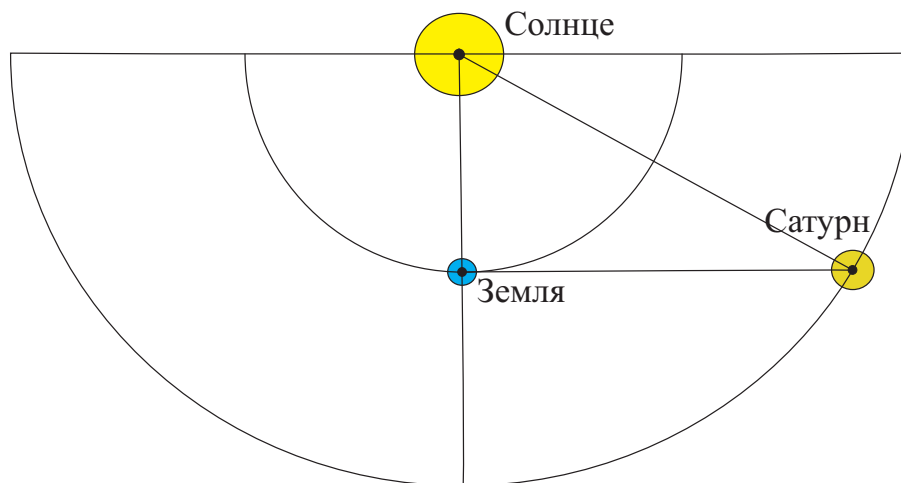


Рис. 2: к определению взаимного расположения Солнца, Земли и Сатурна.

Из рисунка видно, данные планеты образуют прямоугольный треугольник, причем Земля находится в вершине, при которой угол равен 90° . Для гипотетического наблюдателя, находящегося в этот момент в окрестности Сатурна и обращенного лицом к центральному светилу, Земля видна по левую руку (к востоку) от Солнца, в наибольшем удалении от последнего. Именно такую конфигурацию принято называть *восточной элонгацией*.

Ответ: Земля для гипотетического наблюдателя, находящегося в это момент в окрестности Сатурна, будет наблюдаться в *восточной элонгации*. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Дальше, больше, тяжелее...»

Условие. Вашему вниманию представлены 8 классических планет Солнечной системы: Марс, Земля, Венера, Меркурий, Сатурн, Юпитер, Нептун, Уран. Расположите данные планеты в порядке

- а) увеличения их расстояния от Солнца;
 б) уменьшения их масс;
 в) уменьшения их линейных размеров;
 г) уменьшения их средней массовой плотности;
 д) уменьшения количеств известных сегодня у них естественных спутников.
 (За каждую правильно представленную цепочку 1 балл).

Решение:

В действительности имеют место следующие цепочки рассматриваемых объектов.

- а) Меркурий (0.387 а.е.), Венера (0.723 а.е.), Земля (1.000 а.е.), Марс (1.520 а.е.), Юпитер (5.204 а.е.), Сатурн (9.582 а.е.), Уран (19.229 а.е.), Нептун (30.104 а.е.);
 б) Юпитер ($1.899 \cdot 10^{27}$ кг), Сатурн ($5.685 \cdot 10^{26}$ кг), Нептун ($1.024 \cdot 10^{26}$ кг), Уран ($8.683 \cdot 10^{25}$ кг), Земля ($5.974 \cdot 10^{24}$ кг), Венера ($4.869 \cdot 10^{24}$ кг), Марс ($6.419 \cdot 10^{23}$ кг), Меркурий ($3.330 \cdot 10^{23}$ кг);
 в) Юпитер (71492 км), Сатурн (60268 км), Уран (25559 км), Нептун (24764 км), Земля (6378 км), Венера (6052 км), Марс (3396 км), Меркурий (2440 км);
 г) Земля (5515 кг/м^3), Меркурий (5427 кг/м^3), Венера (5240 кг/м^3), Марс (3933 кг/м^3), Нептун (1638 кг/м^3), Юпитер (1326 кг/м^3), Уран (1270 кг/м^3), Сатурн (687 кг/м^3);
 д) Юпитер (67 спутников), Сатурн (62 спутника), Уран (27 спутников), Нептун (14 спутников), Марс (2 спутника), Земля (1 спутник), Венера (0 спутников), Меркурий (0 спутников).
 ($S_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 6. «Яркая звезда на зимнем небосводе»

Условие. Астроном, проживающий в г. Самаре, 27 января 2015 года спустя три с половиной часа после полуночи (по самарскому времени) наблюдал из окна своего дома очень яркую звезду (по блеску сравнимую с самими яркими звездами северной полусферы), находившуюся невысоко над горизонтом. Окна его квартиры выходят на северо-запад (ориентированы на 30° севернее направления "на запад"). Астроном смог оценить угловое расстояние звезды от горизонта – оно оказалось равным 1.5 угловым расстояниям между окончаниями максимально растопыренных мизинца и большого пальца вытянутой руки. Идентифицируйте данную звезду. В каком созвездии она находится? Свой ответ поясните¹. Оцените также азимут и высоту звезды. (5 баллов).

Решение:

Для ответа на вопрос удобно симулировать описанную ситуацию с помощью виртуального планетария Stellarium. 27 января 2015 года спустя три с половиной часа после полуночи по самарскому времени (т.е. в 3 часа 30 минут), в направлении 30° севернее направления "на запад", вид небосвода представлен на рис. 3.

Очевидно, почти в центре поля зрения и невысоко над горизонтом расположена Капелла – α Возничего – самая яркая звезда данного созвездия и одна из самых ярких звезд северной полусферы небосвода (уступает в яркости лишь Арктуру и Вега). Занимает шестое место в списке самых ярких звезд небосвода.

Для оценки азимута (A_*) звезды следует заметить, что звезда находится почти в центре поля зрения, следовательно, сама звезда отстоит приблизительно на 30° севернее точки запада. Азимут точки запада равен 90° , следовательно,

$$A_* \approx 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

¹Для решения задачи могут оказаться полезными подвижная карта звездного неба или компьютерная программа-симулятор звездного неба.



Рис. 3: к определению яркой звезды.

Высота светила (h_*), отсчитываемого от горизонта, по условию задачи равна 1.5 угловым расстояниям между окончаниями максимально растопыренных мизинца и большого пальца вытянутой руки. Последняя величина, как известно, равна приблизительно 22° . Тогда

$$h_* \approx 1.5 \cdot 22^\circ = 33^\circ.$$

Замечание: для проверки достоверности полученных оценок, с помощью той программы можно определить точные значения данных координат на указанное время – $h_* = 35^\circ 35'$, $A_* = 121^\circ 19'$. Очевидно, что полученные глазомерные оценки весьма близки к истинным значениям искомых величин.

Ответ: Капелла (α Возничего), созвездие Возничего; $A_* \approx 120^\circ$, $h_* \approx 33^\circ$. ($S_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Комета и направление на Солнце»

Условие. На рис. 4 представлена телескопическая фотография кометы, полученная астрономами-профессионалами при ее сближении с Солнцем. Используя копию данной фотографии, укажите на последней (стрелкой) направление, в котором нужно было перемещать трубу телескопа авторам фотографии, чтобы можно было в его поле зрения «поймать» Солнце? Свой ответ обоснуйте. (6 баллов).

Решение:

Прежде всего, попытаемся выявить структурные составляющие кометы, которые отчетливо просматриваются на фотографии:

- **Голова кометы** видна на фотографии как наиболее яркая область, имеющая форму близкую к сферической (см. рис. 5), представляющая собой газо-пылевую оболочку – **кому**, окружающую твердотельное образование – **ядро**, состоящее из скальных пород и космических льдов (ядро не видно на фото).



Рис. 4: фотография кометы, полученная астрономами-профессионалами.

- **Пылевой хвост** кометы виден на фотографии как протяженное образование, белесая широкая полоса, отходящая от головы кометы и по мере удаления от нее становящаяся все более разреженной. Представляет собой поток пылевых частиц, поднятых с поверхности ядра кометы потоками газа (в силу малой гравитации) и вынесенной за пределы комы давлением света Солнца. Сила давления, действующая на пылевые частицы сравнима и даже может больше силы притяжения Солнца, в результате чего, частицы выносятся преимущественно от Солнца. В силу большой ширины белесой полосы, можно утверждать, что в данном хвосте присутствуют частицы разной массы и не все они движутся строго от Солнца.
- **Ионный хвост** кометы – протяженное образование, голубая и относительно узкая полоса отходящая от головы кометы. Представляет собой поток ионов газов, сублимирующихся с поверхности ядра. Молекулы газов испытывают неупругие столкновения с заряженными частицами солнечного ветра и превращаются в ионы, последние под действием давления того же ветра увлекаются последним и движутся прочь от Солнца. Причем здесь силы давления со стороны ветра в сотни-тысячи раз превосходят силы их притяжения к Солнцу. Именно поэтому ионный хвост всегда направлен от Солнца. *Значит направление «на Солнце», в котором нужно перемещать трубу телескопа должно быть ориентировано вдоль ионного хвоста на голову кометы (на продолжении этой прямой будет располагаться Солнце),* указано красной стрелкой на рис. 5.

Ответ: искомое направление указано красной стрелкой на рис. 5. ($S_{\max} = 6$ баллов).

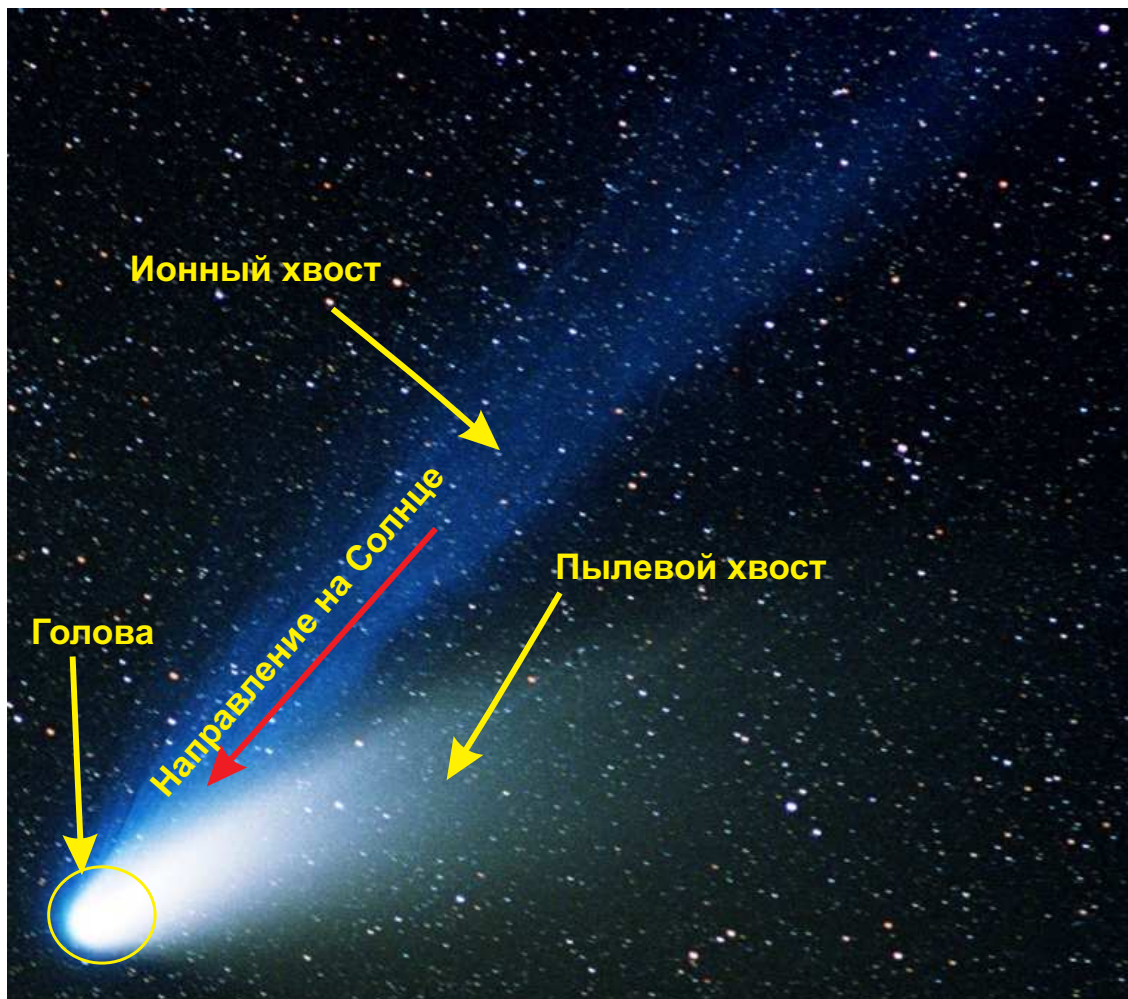


Рис. 5: к определению направления на Солнце.

Задача № 8. «Падение метеороида на галилеев спутник»

Метеороид массой $m = 10$ тонн падает на поверхность одного из галилеевых спутников. Диаметр этого спутника составляет $D = 5.268 \cdot 10^6$ м. График зависимости силы F_{at} гравитационного притяжения метеороида галилеевым спутником от расстояния r между их центрами представлен на рис. 6. Определите ускорение свободного падения у поверхности данного спутника, его массу и среднюю массовую плотность. По полученным данным определите, какой именно это был спутник. (7 баллов).

<p><u>Дано:</u></p> <p>$m = 10^4$ кг, $D = 5.268 \cdot 10^6$ м.</p>	<p><u>Решение:</u></p> <p>Прежде всего заметим, что радиус галилеева спутника есть $\mathfrak{R} = D/2 = 2.634 \cdot 10^6$ м. Сила притяжения метеороида спутником определяется законом всемирного тяготения Ньютона (поскольку все галилеевы спутники имеют форму, близкую к форме шара; метеороид имеет размеры, существенно меньшие размеров спутника, поэтому его можно принять за материальную точку):</p>
<p><u>Найти:</u></p> <p>$g_0, \mathfrak{M}, \bar{\rho} - ?$</p>	$F_{at}(r) = \frac{G m \mathfrak{M}}{r^2}. \quad (1)$

В частности, у поверхности спутника сила притяжения должна быть равна силе тяжести, т.е.

$$F_{at}(\mathfrak{R}) = \frac{G m \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2} = m g_0, \Rightarrow g_0 = \frac{F_{at}(\mathfrak{R})}{m} = 1.45 \text{ м/с}^2, \quad (2)$$

здесь учтено, что согласно графику $F_{at}(\mathfrak{R}) = 14.5$ кН (данное значение отвечает крайней левой точке кривой на рис. 6). Из выражения (2) можно также легко выразить массу спутника:

$$\mathfrak{M} = \frac{F_{at}(\mathfrak{R}) \mathfrak{R}^2}{G m} = \frac{F_{at}(\mathfrak{R}) D^2}{4 G m} = 1.50 \cdot 10^{23} \text{ кг}. \quad (3)$$

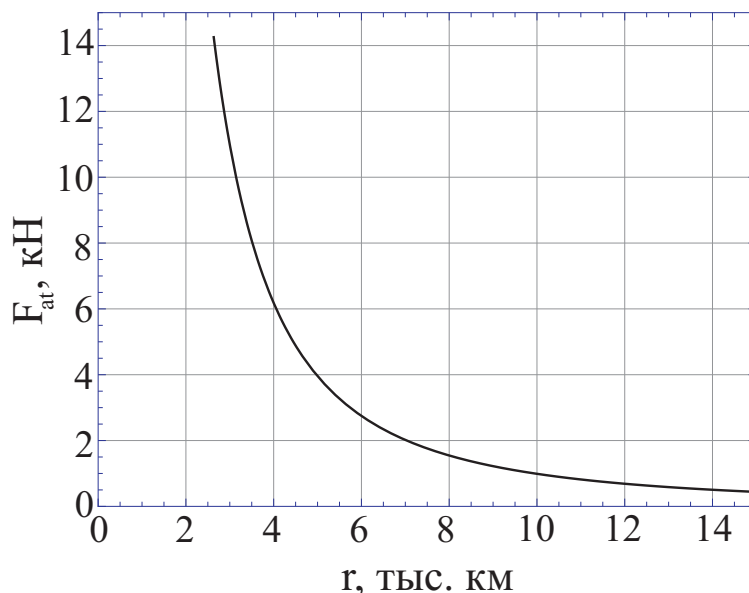


Рис. 6: зависимость силы F_{at} гравитационного притяжения метеороида галилеевым спутником от расстояния r между их центрами.

Далее легко определяется средняя массовая плотность спутника:

$$\bar{\rho} = \frac{\mathcal{M}}{V} = \frac{6 \mathcal{M}}{\pi D^3} = 1960 \text{ кг/м}^3. \quad (4)$$

здесь мы учли, что объема спутника-шара есть

$$V = \frac{\pi}{6} D^3.$$

В таблице 2 представлены результаты вычислений, а также данные для четырех галилеевых спутников. Из сопоставления результатов следует, что это был Ганимед – крупнейший спутник Юпитера.

Спутник	\mathcal{R} , км	g_0 , м/с ²	\mathcal{M} , кг	$\bar{\rho}$, кг/м ³
Ио	1821.3	1.796	$8.932 \cdot 10^{22}$	3528
Европа	1560.8	1.315	$4.802 \cdot 10^{22}$	3014
Ганимед	2634.1	1.428	$1.481 \cdot 10^{23}$	1936
Калисто	2410	1.235	$1.076 \cdot 10^{23}$	1834
Наш рез-тат	2634	1.45	$1.50 \cdot 10^{23}$	1960

Таблица 2: данные для галилеевых спутников и полученные результаты.

Ответ: $g_0 = 1.45 \text{ м/с}^2$, $\mathcal{M} = 1.50 \cdot 10^{23} \text{ кг}$, $\bar{\rho} = 1960 \text{ кг/м}^3$; Ганимед. (7 баллов).

Задача № 9. «Равноудаленные планеты-соседки»

Условие. Для какой классической планеты Солнечной системы отношение минимальных расстояний от данной планеты до двух ближайших классических планет-соседок ближе всего к единице? Орбиты планет считать круговыми. (8 баллов).

Решение:

Как известно, в Солнечной системе существуют 8 классических планет, имеющих следующий порядок удаленности от Солнца: Меркурий (0.387 а.е.), Венера (0.723 а.е.), Земля (1.000 а.е.), Марс (1.520 а.е.), Юпитер (5.204 а.е.), Сатурн (9.582 а.е.), Уран (19.229 а.е.), Нептун (30.104 а.е.). Здесь в скобках указаны расстояния от Солнца до планет в астрономических единицах.

Очевидно, что крайние планеты – Меркурий и Нептун имеют лишь одну планету-соседку и, потому уже не могут быть ответом на поставленный вопрос.

Минимальное расстояние между планетами достигается в случае, когда данные планеты расположены на одной прямой вместе с Солнцем, по одну сторону от последнего. В этом случае минимальное расстояние между планетами 1 и 2 будет равно разности радиусов их орбит:

$$\Delta_{12} = r_2 - r_1.$$

Выполним расчет искомых расстояний и найдем их отношение (см. таблицу 3).

Планета	Δ_1 , а.е.	Δ_2 , а.е.	Δ_2/Δ_1	$ \Delta_2/\Delta_1 - 1 $
Венера	0.336	0.277	0.824	0.176
Земля	0.277	0.520	1.877	0.877
Марс	0.520	3.684	7.085	6.085
Юпитер	3.684	4.378	1.188	0.188
Сатурн	4.378	9.647	2.204	1.204
Уран	9.647	10.875	1.127	0.127

Таблица 3: К определению планеты, удовлетворяющей условиям задачи.

Из таблицы 3 очевидно, что поставленное условие выполняется для планеты Уран.

Ответ: Уран. ($S_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Масса атмосферы Марса»

Условие. Оцените массу атмосферы Марса, если давление марсианского воздуха у поверхности планеты составляет 4.77 мм ртутного столба, радиус планеты составляет $0.532 \cdot R_{\oplus}$, а масса планеты – $0.107 \cdot M_{\oplus}$. Здесь R_{\oplus} , M_{\oplus} – радиус и масса Земли. Во сколько раз масса марсианской атмосферы отличается от массы атмосферы Земли? (8 баллов).

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$p_{\sigma} = 4.77$ мм рт. ст., $R_{\sigma} = 0.532 \cdot R_{\oplus}$, $M_{\sigma} = 0.107 \cdot M_{\oplus}$.	Как известно, атмосфера Марса, является относительно разреженной и, главным образом, состоящей из углекислого газа (CO_2) – относительно тяжелого газа, который под действием гравитации планеты должен собираться преимущественно у поверхности планеты. Логично полагать, что доминирующая часть массы атмосферы планеты должна быть сосредоточена у ее поверхности, в относительно тонком слое, где ускорение свободного падения ($g_{\sigma}^{(0)}$) можно полагать постоянной величиной.
<u>Найти:</u>	
$M_{\sigma}^{(A)}$ – ?	

Следовательно, вес (P) атмосферы планеты должен быть равен силе тяжести, действующей на нее у поверхности, т.е.

$$P = M_{\sigma}^{(A)} g_{\sigma}^{(0)}, \text{ иначе } P = p_{\sigma} S_{\sigma} = p_{\sigma} 4\pi R_{\sigma}^2, \quad (5)$$

откуда следует, что

$$M_{\sigma}^{(A)} = 4\pi \frac{p_{\sigma}}{g_{\sigma}^{(0)}} R_{\sigma}^2, \text{ где } g_{\sigma}^{(0)} = \frac{G M_{\sigma}}{R_{\sigma}^2}. \quad (6)$$

При определении веса атмосферы учтено, что $S_{\sigma} = 4\pi R_{\sigma}^2$ – площадь поверхности планеты-шара. Учитывая также, что атмосферное давление Марса составляет $6.28 \cdot 10^{-3} p_{\oplus}$ (где $p_{\oplus} = 760$ мм рт. ст. = 101325 Па – нормальное атмосферное давление у поверхности Земли), в итоге

$$M_{\sigma}^{(A)} = 4\pi \frac{p_{\sigma} R_{\sigma}^4}{G M_{\sigma}^{(A)}} = \left[\frac{6.28 \cdot 10^{-3} \cdot (0.532)^4}{0.107} \right] M_{\oplus}^{(A)} = 4.70 \cdot 10^{-3} M_{\oplus}^{(A)} = 2.48 \cdot 10^{16} \text{ кг}, \quad (7)$$

где $M_{\oplus}^{(A)}$ – масса атмосферы Земли, вычисляемая аналогичным образом:

$$M_{\oplus}^{(A)} = 4\pi \frac{p_{\oplus} R_{\oplus}^4}{G M_{\oplus}^{(A)}} = 4\pi \frac{p_{\oplus} R_{\oplus}^2}{g_{\oplus}^{(0)}} = 4\pi \frac{101325 \text{ Па} (6.371 \cdot 10^6 \text{ м})^2}{9.81 \text{ м/с}^2} = 5.27 \cdot 10^{18} \text{ кг}.$$

При записи последнего результата мы учли, что $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6371$ км – средний радиус Земли, $\mathfrak{M}_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли, $g_{\oplus}^{(0)} = G \mathfrak{M}_{\oplus} / \mathfrak{R}_{\oplus}^2 = 9.81$ м/с² – ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Ответ: $\mathfrak{M}_{\sigma}^{(A)} = 4\pi \frac{\rho_{\sigma} \mathfrak{R}_{\sigma}^4}{G \mathfrak{M}_{\sigma}^{(A)}} = 2.48 \cdot 10^{16}$ кг, $\mathfrak{M}_{\sigma}^{(A)} / \mathfrak{M}_{\oplus}^{(A)} = 4.70 \cdot 10^{-3}$. (8 баллов).

Задача № 11. «Сжатие видимого диска Солнца у горизонта»

Условие. Наблюдается восход Солнца, причем в некоторый момент времени нижняя точка его видимого диска касается горизонта. Оцените максимальную разность угловых диаметров Солнца ($D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot}$) и соответствующее *видимое сжатие диска*, определяемое выражением

$$k = \frac{D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot}}{D''_{\max \odot}}. \quad (8)$$

где $D''_{\max \odot}$, $D''_{\min \odot}$ – максимальное и минимальное значения углового диаметра Солнца. (9 баллов).

Замечание. Для решения задачи следует воспользоваться эмпирической **формулой Беннетта** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от видимой высоты светила h_a (в градусах):

$$\delta h = \text{ctg} \left(\frac{h_a}{1^\circ} + \frac{7.31^\circ}{h_a + 4.4^\circ} \right) \quad (9)$$

и **формулой Смартсона** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от истинной высоты светила h_0 (в градусах):

$$\delta h = 1.02 \cdot \text{ctg} \left(\frac{h_0}{1^\circ} + \frac{10.3^\circ}{h_0 + 5.1^\circ} \right). \quad (10)$$

Решение:

Как известно, рефракция света «сжимает» образы небесных тел у горизонта, вдоль круга высоты (по вертикали). При этом в горизонтальном направлении размеры остаются без искажений. Следовательно, максимальный угловой диаметр Солнца будет определяться вдоль линии параллельной горизонту. Положим его равным $D''_{\max \odot} = 32.0'$ (можно вычислить самому или взять из справочной литературы).

Связь истинной высоты h_0 точки светила с видимой h_a определяется выражением вида:

$$h_a = h_0 + \delta h,$$

где δh определяется одной из формул (9)-(10).

Согласно условию задачи, в некоторый момент времени нижняя точка (B) его видимого диска касается горизонта, тогда ее видимая высота должна быть равна $h_a^{(B)} = 0^\circ$. Следовательно, можно вычислить истинную высоту данной точки

$$h_0^{(B)} = h_a^{(B)} - \delta h = h_a^{(B)} - \text{ctg} \left(h_a^{(B)} + \frac{7.31^\circ}{h_a^{(B)} + 4.4^\circ} \right) = 0^\circ 00' - 34.5' = -34.5'.$$

Поскольку, диск Солнца в отсутствие рефракции является круглым, то истинная высота его верхней точки (T) в тот же момент времени есть

$$h_0^{(T)} = h_0^{(B)} + D''_{\max \odot} = -2.5'.$$

Теперь легко вычислить видимую высоту точки Т:

$$h_a^{(T)} = h_0^{(T)} + \delta h = h_0^{(T)} + 1.02 \cdot \text{ctg} \left(h_0^{(T)} + \frac{10.3^\circ}{h_0^{(T)} + 5.1^\circ} \right) = -2.5' + 29.3' = 26.8'.$$

Следовательно, минимальное значение углового диаметра Солнца есть

$$D''_{\min \odot} = h_a^{(T)} - h_a^{(B)} = 26.8'.$$

В итоге

$$D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot} = 32.0' - 26.8' = 5.2', \quad k = \frac{D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot}}{D''_{\max \odot}} = 0.16.$$

Ответ: $D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot} = 5.2', k = \frac{D''_{\max \odot} - D''_{\min \odot}}{D''_{\max \odot}} = 0.16.$ (9 баллов).

Задача № 12. «ИСЗ и его движение в области земной тени»

Условие. Искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется по круговой орбите, лежащей в плоскости земной орбиты. Спутник на каждом витке попадает в область земной тени. Определите зависимость отношения времени пребывания ИСЗ в области земной тени к сидерическому периоду обращения спутника от радиуса его круговой орбиты. Какое максимальное и минимальное количество времени в течение одних суток может пребывать Международная космическая станция (МКС) в области земной тени (движущаяся по указанной орбите), если высота ее орбиты равна 415 км? (10 баллов).

Решение:

Пусть Δt_{sh} – время пребывания спутника в области земной тени. Поскольку спутник под действием силы притяжения движется по круговой орбите равномерно, то данное время можно определить как

$$\Delta t_{\text{sh}} = \frac{\overset{\frown}{CH}}{V_s} = \frac{D_{\text{sh}} \cdot r}{V_s}, \quad (11)$$

здесь $\overset{\frown}{CH}$ – дуга окружности орбиты ИСЗ, заключенная внутри земной тени (см. рис. 7); D_{sh} – угол раствора, соответствующий данной дуге с вершиной, совпадающей с центром Земли; r, V_s – радиус орбиты и орбитальная скорость спутника соответственно.

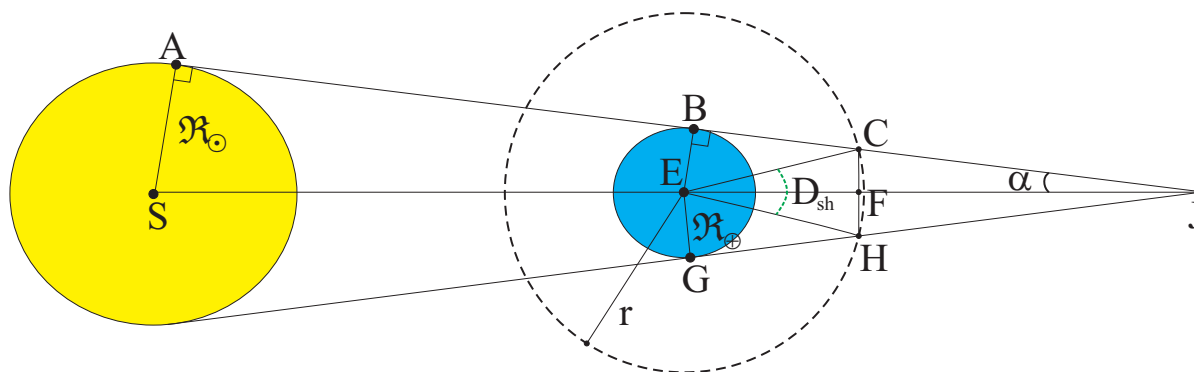


Рис. 7: к определению отношения $\Delta t_{\text{sh}}/T$.

Аналогично можно записать сидерический период обращения спутника вокруг Земли:

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{V_s}. \quad (12)$$

Разделим уравнения (11) на (12), получим в результате:

$$\frac{\Delta t_{\text{sh}}}{T} = \frac{D_{\text{sh}}}{2\pi}. \quad (13)$$

Т.о. поиск искомой величины сводится к вычислению угла $D_{\text{sh}} = \angle CEH$.

Для определения последнего воспользуемся подобием треугольников $\triangle EBJ$ и $\triangle FJ$:

$$\frac{EB}{CF} = \frac{EJ}{CJ},$$

учитывая, что $EB = \mathfrak{R}_{\oplus} = 6371$ км – средний радиус Земли, $EJ = L_{\text{sh}}$ – высота конуса земной тени (подлежит определению); $CF = r \sin(D_{\text{sh}}/2)$, $CJ = FJ/\cos \alpha$. В свою очередь, $FJ = L_{\text{sh}} - r \cos(D_{\text{sh}}/2)$. В итоге условие подобия представляется в виде:

$$\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{r \sin(D_{\text{sh}}/2)} = \frac{L_{\text{sh}} \cos \alpha}{L_{\text{sh}} - r \cos(D_{\text{sh}}/2)}, \Rightarrow \mathfrak{R}_{\oplus}(L_{\text{sh}} - r \cos(D_{\text{sh}}/2)) = r L_{\text{sh}} \cos \alpha \sin(D_{\text{sh}}/2).$$

Разделим обе части последнего уравнения на L_{sh}^2 и введем для удобства следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{L_{\text{sh}}} = \sin \alpha, \quad x = \frac{r}{L_{\text{sh}}}, \quad y = \sin \frac{D_{\text{sh}}}{2},$$

тогда последнее уравнение представляется в виде:

$$\varepsilon(1 - x\sqrt{1 - y^2}) = x\sqrt{1 - \varepsilon^2}y, \Rightarrow \varepsilon - x\sqrt{1 - \varepsilon^2}y = \varepsilon x\sqrt{1 - y^2}.$$

Возведем полученное уравнение в квадрат:

$$\varepsilon^2 - 2x\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}y + x^2(1 - \varepsilon^2)y^2 = \varepsilon^2 x^2(1 - y^2), \Rightarrow x^2 y^2 - 2x\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}y + \varepsilon^2(1 - x^2) = 0,$$

Решая последнее уравнение относительно переменной y , в результате получаем следующие корни:

$$y = \frac{1}{2x^2} \left(2x\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} \pm 2x\varepsilon\sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right), \Rightarrow y = \frac{\varepsilon}{x} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \pm \sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right).$$

Простой проверкой в частном случае $x = \varepsilon$, убеждается в том, что корень со знаком «+» не удовлетворяет физическим условиям задачи и потому должен быть отброшен. В итоге

$$\sin \frac{D_{\text{sh}}}{2} = \frac{\varepsilon}{x} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right), \Rightarrow D_{\text{sh}} = 2 \arcsin \left[\frac{\varepsilon}{x} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right) \right]. \quad (14)$$

Следовательно, отношение $\Delta t_{\text{sh}}/T$ представляется в виде:

$$\frac{\Delta t_{\text{sh}}}{T} = \frac{1}{\pi} \arcsin \left[\frac{\varepsilon}{x} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right) \right], \quad \text{где } x = \frac{r}{L_{\text{sh}}}. \quad (15)$$

Для определения L_{sh} воспользуемся подобием треугольников $\triangle EBJ$ и $\triangle SAJ$:

$$\frac{SA}{EB} = \frac{SJ}{EJ}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} = \frac{a_{\oplus} + L_{\text{sh}}}{L_{\text{sh}}}, \Rightarrow L_{\text{sh}} = a_{\oplus} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} - 1 \right)^{-1} = 1.381 \cdot 10^6 \text{ км} \gg \mathfrak{R}_{\odot}.$$

здесь мы учли, что $\mathfrak{R}_{\odot} = 6.965 \cdot 10^5$ км – радиус Солнца, $a_{\oplus} = 1.496 \cdot 10^8$ км – большая полуось земной орбиты. Параметр x можно также представить в виде:

$$x = \frac{r}{a_{\oplus}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} - 1 \right).$$

Рассмотрим случай МКС. Здесь $r = \mathfrak{R}_{\odot} + h = 6786$ км, $x = 4.91 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 4.61 \cdot 10^{-3}$, тогда $\Delta t_{\text{sh}}/T = 0.387$.

С использованием третьего закона Ньютона определим период вращения МКС:

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 = \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^3, \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^{3/2} = 1.547 \text{ часа}, \quad \text{где } T_0 = \frac{2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}}{V_I} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{g_0}} = 1.407 \text{ часа}.$$

Следовательно, время пребывания МКС в тени на одном витке есть $\Delta t_{\text{sh}} = 0.599$ часа = 35.9 минут.

Учитывая, что отношение $24 \text{ часа}/T \approx 15.5$, т.е. МКС за одни сутки совершает 15.5 оборотов вокруг центра Земли, то возможно $N_{\min} = 15$ сеансов пребывания в тени за сутки (в случае, когда пролетев первые 0.5 витка на Солнце, станция заходит в тень), а также $N_{\min} = 16$ сеансов пребывания в тени за сутки (в случае, когда в начале суток станция заходит в тень). Следовательно, минимальное время пребывания МКС в тени в течение одних суток есть

$$\Delta T_{\min}^{(\text{sh})} = N_{\min} \cdot \Delta t_{\text{sh}} = 8.985 \text{ часов} = 8 \text{ часов } 59 \text{ мин.},$$

Максимальное время пребывания МКС в тени в течение одних суток

$$\Delta T_{\max}^{(\text{sh})} = N_{\max} \cdot \Delta t_{\text{sh}} = 9.584 \text{ часов} = 9 \text{ часов } 35 \text{ мин.}$$

Ответ: $\frac{\Delta t_{\text{sh}}}{T} = \frac{1}{\pi} \arcsin \left[\frac{\varepsilon}{x} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{x^2 - \varepsilon^2} \right) \right]$, где $x = \frac{r}{a_{\oplus}} \left(\frac{a_{\oplus}}{a_{\odot}} - 1 \right)$,
 $\Delta T_{\min}^{(\text{sh})} = 8 \text{ часов } 59 \text{ мин.}$, $\Delta T_{\max}^{(\text{sh})} = 9 \text{ часов } 35 \text{ мин.}$ ($S_{\max} = 10 \text{ баллов}$).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Закон Тициуса-Бодде и орбиты гипотетических планет»

Условие. Как известно, закон Тициуса-Бодде – это правило, эмпирическая формула, приближенно определяющая гелиоцентрические расстояния всех классических планет (за исключением Нептуна) и карликовых планет (для Плутона и Эриды). С использованием данного закона

- оцените абсолютную и относительную погрешность определения гелиоцентрических расстояний до указанных выше тел.
- определите радиусы круговых орбит гипотетических планет, которые могут находиться за орбитой Эриды, вплоть до внутренней границы облака Оорта ($2 \cdot 10^3 \text{ а.е.}$)².

(11 баллов).

Решение:

1. Закон Тициуса-Бодде, определяющий среднее гелиоцентрическое расстояние (r) до планеты может быть представлен в виде:

$$r_n = 0.1 (4 + 3 \cdot 2^n).$$

Абсолютную погрешность определения расстояния с помощью данного закона будем определять в виде:

$$\Delta r = |r_n - r_n^{(0)}|$$

здесь $r_n^{(0)}$ – точное среднего значения гелиоцентрического расстояния до планеты. Относительную погрешность определим как

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r_n^{(0)}} \cdot 100\%.$$

Выполняя расчет, согласно приведенным формулам, получаем следующие результаты, представленные в таблице 4. Из последнего столбца видно, что данный закон дает весьма точные прогнозы для планетных расстояний для большинства рассматриваемых тел и относительная погрешность не превышает $(3 \div 4)\%$.

2. Для определения радиусов круговых орбит гипотетических планет, которые могут находиться за орбитой Эриды и на расстояниях не более 10^3 а.е. , необходимо вычислить расстояния r_n для $n = 9, 10, 11, 12$. Результаты вычислений представлены в таблице 5.

²Недавние теоретические исследования движений тел внешней части Солнечной системы, выполненные группой испанских и британских астрономов во главе с Карлосом де ла Фуэнте Маркосом, указали на существование на дальних ее рубежах, как минимум, двух неизвестных планет.

Планета	n	r_n , а.е.	$r_n^{(0)}$, а.е.	Δr , а.е.	ε_r , %
Меркурий	$-\infty$	0.4	0.387	0.013	3.35
Венера	0	0.7	0.723	0.023	3.18
Земля	1	1	1.000	0.000	0.00
Марс	2	1.6	1.52	0.08	5.26
Пояс астероидов	3	2.8	2.2 ÷ 3.6	–	–
Юпитер	4	5.2	5.204	0.004	0.08
Сатурн	5	10.0	9.582	0.418	4.36
Уран	6	19.6	19.229	0.371	1.93
Нептун	–	–	30.104	–	–
Плутон	7	38.8	39.264	0.464	1.18
Эрида	8	77.2	67.958	9.242	13.60

Таблица 4: результаты вычислений и данные для гелиоцентрических расстояний классических и карликовых планет Солнечной системы.

Планета №	n	r_n , а.е.
1	9	154
2	10	307.6
3	11	614.8
4	12	1229.2

Таблица 5: результаты вычислений для радиусов круговых орбит гипотетических планет, которые могут находиться за орбитой Эриды и на расстояниях не более $2 \cdot 10^3$ а.е.

Из приведенных данных следует, что возможны 4 вакантные орбиты с $r = 154$ а.е., 307.6 а.е., 614.8 а.е., 1229.2 а.е.

Интересно заметить, что группа испанских и британских астрономов во главе с Карлосом де ла Фуэнте Маркосом, в начале 2015 года указали на существование, как минимум, двух планет, одна из которых должна находиться на расстоянии 150 а.е., а вторая – на расстоянии 250 ÷ 300 а.е. Т.о. результаты наших расчетов согласуются с предсказаниями сложных математических моделей эволюции орбит тел Солнечной системы.

Ответ: результаты расчетов представлены в таблицах 4, 5. ($S_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Маятниковые часы на Земле и Марсе»

Условие. Для проведения будущих научных экспериментов на Марсе было предложено использовать специальные маятниковые часы, основу которых составляют 1) гиря малых размеров, прикрепленная к одному концу 2) жесткой, прямой, легкой штанги, второй конец которой прикреплен к свободно вращающейся горизонтальной оси. Предполагается, что данные часы будут выверены в земной лаборатории при температуре $+20^\circ\text{C}$. Затем часы будут отправлены на Марс, где температура поверхности в момент проведения эксперимента составит -60°C . Учитывая, что радиус Марса составляет $0.532 \cdot R_{\oplus}$, а масса – $0.107 \cdot M_{\oplus}$ (здесь R_{\oplus} , M_{\oplus} – радиус и масса Земли) определите промежуток времени, в течение которого часовая стрелка часов совершит один полный оборот в указанных условиях. Насколько эффективно использование этих часов для точного измерения времени на Марсе? Коэффициент линейного расширения штанги $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$. Сопротивлением атмосферы движению маятника и трением в оси пренебречь. (12 баллов).

<p><u>Дано:</u></p> $t_{\oplus} = +20^{\circ}\text{C},$ $t_{\sigma} = -60^{\circ}\text{C},$ $\mathfrak{R}_{\sigma} = 0.532 \cdot \mathfrak{R}_{\oplus},$ $\mathfrak{M}_{\sigma} = 0.107 \cdot \mathfrak{M}_{\oplus},$ $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}.$	<p><u>Решение:</u></p> <p>Очевидно, что часовой маятник есть математический маятник, период малых колебаний, которого определяется выражением:</p> $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}}, \quad (16)$ <p>здесь ℓ – длина штанги маятника, g_0 – ускорение свободного падения у поверхности планеты. Согласно, условию задачи, часы будут выверены в земных условиях, т.е. промежуток времени (ΔT_{\oplus}), отвечающий одному обороту часовой стрелки в условиях земной лаборатории будет равен $\Delta T_{\oplus} = 12$ часам.</p>
<p><u>Найти:</u></p> $\Delta T_{\sigma} - ?$	

За указанный промежуток времени маятник совершит N_{\oplus} колебаний:

$$N_{\oplus} = \frac{\Delta T_{\oplus}}{T_{\oplus}}, \text{ где } T_{\oplus} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\oplus}}{g_{\oplus}}}, \ell_{\oplus} = \ell_0(1 + \alpha t_{\oplus}), g_{\oplus} = \frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2},$$

здесь ℓ_0 – длина штанги при 0°C .

На поверхности Марса маятнику необходимо также совершить N_{\oplus} колебаний, чтобы часовая стрелка совершила один полный оборот, однако здесь колебания совершаются уже с периодом T_{σ} , тогда

$$\Delta T_{\sigma} = N_{\oplus} T_{\sigma} = \Delta T_{\oplus} \frac{T_{\sigma}}{T_{\oplus}}, \text{ где } T_{\sigma} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\sigma}}{g_{\sigma}}}, \ell_{\sigma} = \ell_0(1 + \alpha t_{\sigma}), g_{\sigma} = \frac{G\mathfrak{M}_{\sigma}}{\mathfrak{R}_{\sigma}^2},$$

или

$$\Delta T_{\sigma} = \Delta T_{\oplus} \sqrt{\frac{\ell_{\sigma} g_{\oplus}}{\ell_{\oplus} g_{\sigma}}} = \Delta T_{\oplus} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\sigma}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\sigma}}{\mathfrak{R}_{\oplus}}\right)^2 \left(\frac{1 + \alpha t_{\sigma}}{1 + \alpha t_{\oplus}}\right)} = 19 \text{ час } 29 \text{ мин.}$$

Т.о. данные часы отстали от истинного времени за 19 часов 29 мин на 7 часов 29 мин! Это очень большое отклонение и использование таких часов на Марсе крайне не эффективно.

Ответ: $\Delta T_{\sigma} = 19$ час 29 мин; использование таких часов на Марсе крайне не эффективно. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Тройной транзит галилеевых спутников – редкое природное явление»

Условие. 23 января 2015 года космический телескоп имени Э. Хаббла получил четкие снимки (см. рис. 8) редкого явления в системе «Юпитер» – *тройного транзита галилеевых спутников* – прохождение одновременно по диску материнской планеты Ио, Европы и Каллисто. Ученые утверждают, что данный феномен является редким природным явлением, однако, в своих комментариях не приводят каких-либо численных оценок. С использованием данных наблюдений для указанных спутников, представленных в таблице 6, сидерических периодов обращения Юпитера ($T_J = 4332.589$ сут) и Земли ($T_{\oplus} = 365.256366$ сут) оцените промежуток времени между такими двумя последовательными событиями. (13 баллов).

<p><u>Дано:</u></p> $T_J = 4332.589$ сут, $T_{\oplus} = 365.256366$ сут.	<p><u>Решение:</u></p> <p>Прежде всего заметим, что на фотографиях виден фактически весь диск планеты, т.е. фаза планеты близка к единице, следовательно, фотография сделана вблизи противостояния. И это действительно так – противостояние состоялось 7.02.2015 года.</p> <p>Будем далее для определенности полагать, что это был именно момент противостояния. Чтобы подобный феномен имел место, необходимо выполнение следующих условий:</p>
<p><u>Найти:</u></p> $\Delta T - ?$	

1. Ио, Европа, Каллисто должны расположиться вдоль одного луча, с началом в центре материнской планеты,
2. данный луч должен быть направлен на Солнце (т.е. спутники должны находится в подсолнечных точках своих орбит),
3. Земля должна быть в противостоянии (для оптимальных условий наблюдения). Конечно, такой феномен можно наблюдать и в других конфигурациях, однако ее наблюдение, несомненно, будет менее комфортным.

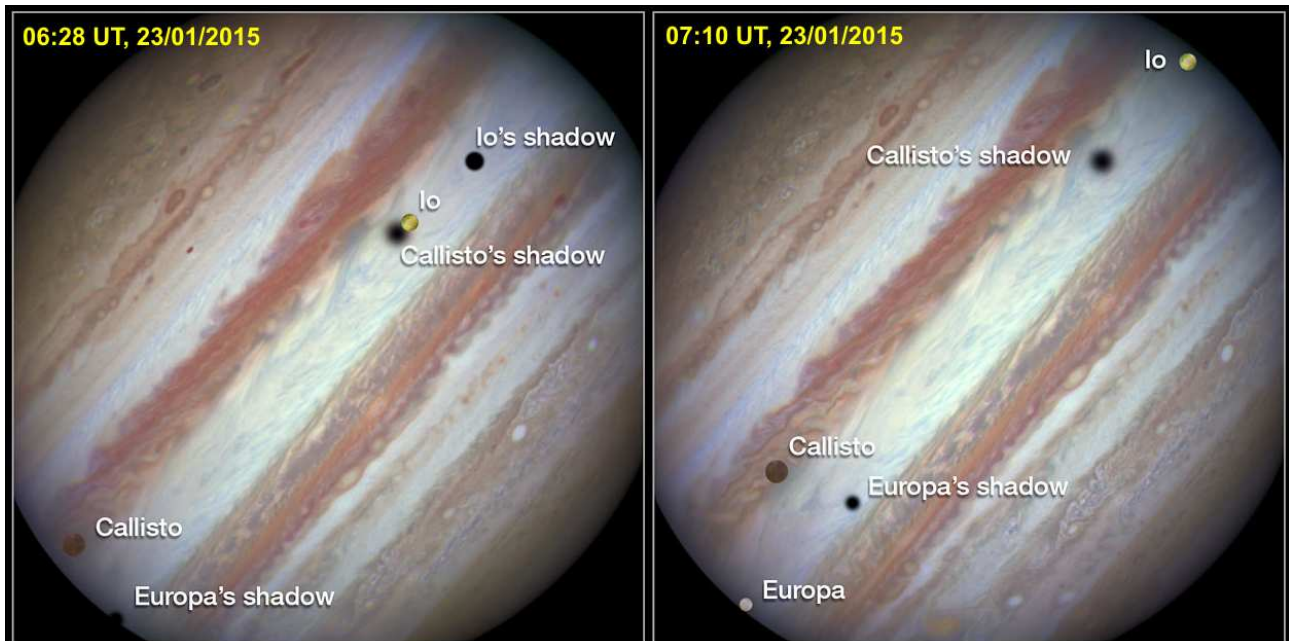


Рис. 8: Фотографии тройного транзита галилеевых спутников Юпитера, полученные с помощью космического телескопа им. Э. Хаббла.

Параметр	Галилеевы спутники			
	Ио	Европа	Ганимед	Каллисто
Большая полуось, км	421700	670900	1070400	1 882 700
Эксцентриситет	0.0041	0.009	0.0013	0.0074
Периодический, км	420000	664862	1069200	1869000
Апоидный, км	423400	676938	1071600	1897000
Наклонение орбиты к пл-ти экватора Юпитера, град	0.05	0.470	0.200	0.192
Средняя орбитальная скорость, км/с	17.334	13.740	10.880	8.204
Сидерический период обращения, сут	1.769137	3.551181	7.154553	16.689018

Таблица 6: Основные орбитальные характеристики галилеевых спутников Юпитера.

Данные процессы характеризуются 5 периодами: T_I , T_E , T_C – сидерическими периодами обращения Ио, Европы, Каллисто соответственно вокруг материнской планеты; сидерическими периодами T_J , T_\oplus обращения Юпитера и Земли соответственно вокруг Солнца. Частота пребывания галилеева спутника в подсолнечной точке будет характеризоваться его синодическим периодом (местными истинными солнечными сутками):

$$S_i = \frac{T_J T_i}{T_J - T_i}, \text{ где } i = I \text{ (Ио)}, E \text{ (Европа)}, C \text{ (Каллисто)}.$$

В итоге, мы получаем следующие значения $S_I = 1.770$ сут, $S_E = 3.554$ сут, $S_C = 16.754$ сут. Важно удерживать для последующих расчетов, как минимум три знака после запятой, поскольку тогда мы

определяем результат с точностью до 1/1000 суток или 87 сек, что порядка 1 минуты. Ошибка результата в одну минуту не сможет "разрушить" конфигурацию в принципе, поскольку характерное время продолжительности транзита, согласно фотографиям заведомо больше (порядка 30 минут).

Пребывание Юпитера в противостоянии определяется его синодическим периодом:

$$S_J = \frac{T_J T_{\oplus}}{T_J - T_{\oplus}} = 398.884 \text{ сут.}$$

Умножим, полученные периоды на "1000" и превратим их в натуральные числа, получим: 1770, 3554, 16754, 398884. Конфигурация повторится через промежуток времени, очевидно, являющийся наименьшим общим кратным данных чисел. Для его определения разложим данные числа на простые множители, для этого выписываем все простые множители:

$$\begin{aligned} 1770 & : \{2^1, 3^1, 5^1, 59^1\}, \\ 3554 & : \{2^1, 1777^1\}, \\ 16754 & : \{2^1, 8377^1\}, \\ 398884 & : \{2^2, 99721^1\}, \end{aligned}$$

каждый из взятых множителей возводим в наибольшую из тех степеней, с которыми он входит в заданные числа. Производим умножение:

$$2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 59^1 \times 1777^1 \times 8377^1 \times 99721^1 = 5254916629363860.$$

Разделим полученное число на 1000 и на 365.24219 (последнее число – количество суток в одном тропическом году).

В итоге мы получаем $\Delta T = 1.439 \cdot 10^{10}$ лет, что больше времени существования Вселенной. Т.о. данное явление, по сути, уникальное.

Ответ: $\Delta T = 1.439 \cdot 10^{10}$ лет. ($S_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Тройной транзит галилеевых спутников и определение их орбитальных скоростей, полярного сжатия Юпитера»

Условие. Для феномена, описанного в задаче № 15, с использованием лишь 1) фотографий рис. 8 и представленной на них информации, 2) значения экваториального радиуса Юпитера $\mathfrak{R}_J^{(e)} = 71492$ км и 3) предположения о круговых орбитах наблюдаемых спутников, оцените орбитальные скорости их движения и полярное сжатие Юпитера. Определите абсолютную и относительную ошибку определения искомых величин с использованием точных значений, представленных в таблице 6. Табличное значение коэффициента полярного сжатия Юпитера – $k_J^{(0)} = 0.06487$. (13 баллов).

<p style="text-align: center;"><u>Дано:</u></p> $\mathfrak{R}_J^{(e)} = 71492 \text{ км,}$ $k_J = 0.06487.$	<p style="text-align: center;"><u>Решение:</u></p> <p>Согласно определению, полярным сжатием планеты называется следующее отношение:</p> $k_J = \frac{\mathfrak{R}_J^{(e)} - \mathfrak{R}_J^{(p)}}{\mathfrak{R}_J^{(e)}}, \quad (17)$ <p>здесь $\mathfrak{R}_J^{(e)}, \mathfrak{R}_J^{(p)}$ – экваториальный и полярный радиусы планеты соответственно.</p>
<p style="text-align: center;"><u>Найти:</u></p> $R_{\text{ат}} - ?$	

Для решения настоящей и будущих задач на каждой из данных фотографий введем декартову систему координат, причем так, чтобы ось ОХ была направлена вдоль экватора, ось ОУ была направлена вдоль оси вращения планеты, а начало координат (точка О) совпадало с геометрическим центром планеты (см. рис. 9). Изначально, это можно сделать лишь приближенно, на глаз, но дальнейшие расчеты потребуют уточнения положения точки О.

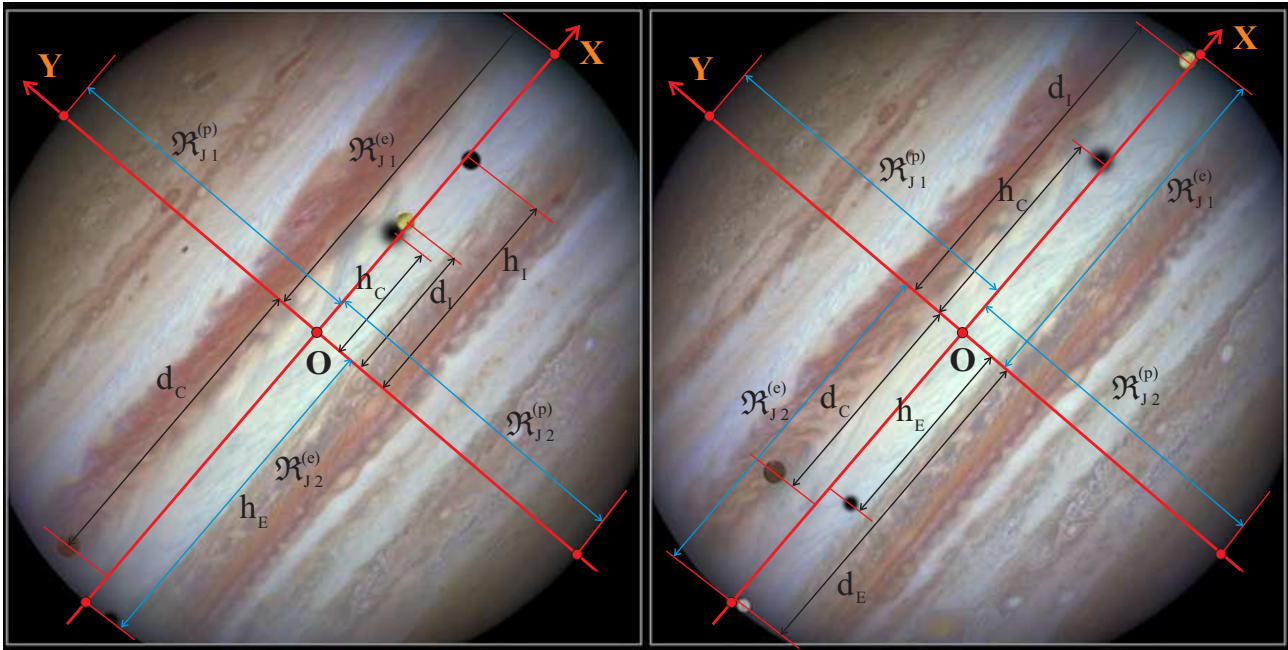


Рис. 9: к определению основных параметров расчетов.

Для определения истинного положения точки O определим на каждой фотографии значения двух экваториальных ($\mathfrak{R}_{J1}^{(e)} = 48.5$ мм, $\mathfrak{R}_{J2}^{(e)} = 47$ мм) и полярных ($\mathfrak{R}_{J1}^{(p)} = 44$ мм, $\mathfrak{R}_{J2}^{(p)} = 45$ мм) радиусов планеты.

$$\text{фото 1: } \mathfrak{R}_{J1}^{(e)} = 48.5 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J2}^{(e)} = 47 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J1}^{(p)} = 44 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J2}^{(p)} = 45 \text{ мм.}$$

$$\text{фото 2: } \mathfrak{R}_{J1}^{(e)} = 48.5 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J2}^{(e)} = 47 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J1}^{(p)} = 44 \text{ мм, } \mathfrak{R}_{J2}^{(p)} = 45 \text{ мм.}$$

Важно заметить, что ваши результаты измерений могут отличаться от представленных, поскольку искомые величины напрямую зависят от масштаба используемой фотографии. В качестве истинных значений примем их средние арифметические значения:

$$\bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{R}_{J1}^{(e)} + \mathfrak{R}_{J2}^{(e)}) = 47.75 \text{ мм, } \bar{\mathfrak{R}}_J^{(p)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{R}_{J1}^{(p)} + \mathfrak{R}_{J2}^{(p)}) = 44.5 \text{ мм.}$$

Следовательно, истинный геометрический центр планеты (в нашем случае, на обеих фотографиях, см. рис. 9) лежит ниже оси OX на $\delta Y = 0.5$ мм, и на $\delta X = 0.75$ мм правее оси OY . Данные поправки следует учитывать в последующих расчетах.

Полагая, что линейные масштабы фотографий одинаковы и в любой их точке постоянны, то

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{\mathfrak{R}_J^{(e)}}{\bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}} = 1497.214 \text{ км/мм.}$$

Тогда можно определить полярный радиус планеты (в км):

$$\mathfrak{R}_J^{(e)} = \mu \bar{\mathfrak{R}}_J^{(p)} = 66626 \text{ км.}$$

В итоге полярное сжатие получается равным

$$k_J = 0.06806.$$

Абсолютную и относительную погрешность определения k_J оценим так:

$$\Delta k_J = |k_J - k_J^{(0)}| = 0.00319, \quad \varepsilon_{k_J} = \frac{\Delta k_J}{k_J^{(0)}} \times 100\% = 4.9\%.$$

Заметим, что на обоих кадрах видны положения Ио и Каллисто (движутся непосредственно перед Юпитером). Поскольку промежуток времени между моментами получения данных фотографий $\Delta t = 42$ мин (2520 сек) является относительно малым, то можно полагать, что описываемые ими дуги окружностей (их орбит) есть прямые отрезки, тогда скорости спутников можно представить в виде (с учетом $\delta X_1 = \delta X_2 = \delta X$):

$$V_C = \mu \frac{d_C^{(1)} + \delta X_1 - (d_C^{(2)} + \delta X_2)}{\Delta t} = \mu \frac{(d_C^{(1)} - d_C^{(2)})}{\Delta t}, \quad V_I = \mu \frac{(d_I^{(2)} - d_I^{(1)})}{\Delta t}, \quad (18)$$

Определяя по рис. 9 параметры $d_C^{(1)} = 42.5$ мм, $d_C^{(2)} = 30.0$ мм, $d_I^{(1)} = 19.0$ мм, $d_I^{(2)} = 47.0$ мм, в результате получаем следующие значения скорости:

$$V_C = 7.427 \text{ км/с}, \quad V_I = 16.635 \text{ км/с}.$$

Погрешность оценим так:

$$\Delta V_C = |V_C - V_C^{(0)}| = 0.777 \text{ км/с}, \quad \varepsilon_{V_C} = \frac{\Delta V_C}{V_C^{(0)}} \times 100\% = 9.48\%.$$

$$\Delta V_I = |V_I - V_I^{(0)}| = 0.698 \text{ км/с}, \quad \varepsilon_{V_I} = \frac{\Delta V_I}{V_I^{(0)}} \times 100\% = 4.03\%.$$

При определении орбитальной скорости Европы, мы учли, что на обеих фотографиях видна лишь тень, движущаяся по поверхности планеты, и потому пройденный путь по орбите спутником должен быть приблизительно равен дуге экватора $T_1 T_2$, пройденной тенью (в силу параллельности световых солнечных лучей), умноженной на $\cos((\alpha_1 + \alpha_2)/2)$ (см. рис. 10.a).

$$\begin{aligned} V_E &= \mu \frac{T_1 T_2}{\Delta t} \cos((\alpha_1 + \alpha_2)/2) = \mu \mathfrak{R}_J^{(e)} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\Delta t} \cos((\alpha_1 + \alpha_2)/2) = \\ &= \frac{\mathfrak{R}_J^{(e)}}{\Delta t} \left(\arcsin \frac{h_E^{(1)} + \delta X}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} - \arcsin \frac{h_E^{(2)} + \delta X}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} \right) \cos((\alpha_1 + \alpha_2)/2), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь α_1, α_2 – углы между направлениями на наблюдателя и на положения тени 1 и 2, если смотреть из центра планеты. Учитывая, что $h_E^{(1)} = 47$ мм, $h_E^{(2)} = 27$ мм, $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 35.53^\circ$, $V_E = 12.342$ км/с.

$$\Delta V_E = |V_E - V_E^{(0)}| = 1.398 \text{ км/с}, \quad \varepsilon_{V_I} = \frac{\Delta V_I}{V_I^{(0)}} \times 100\% = 10.02\%.$$

Ответ: $k_J = 0.06806$, $\Delta k_J = 0.00319$, $\varepsilon_{k_J} = 4.9\%$; $V_C = 7.427$ км/с, $\Delta V_C = 0.777$ км/с, $\varepsilon_{V_C} = 9.48\%$; $V_I = 16.635$ км/с, $\Delta V_I = 0.698$ км/с, $\varepsilon_{V_I} = 4.03\%$; $V_E = 12.342$ км/с, $\Delta V_E = 1.398$ км/с, $\varepsilon_{V_I} = 10.02\%$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Тройной транзит галилеевых спутников и определение радиусов их орбит, сидерических периодов обращения»

Условие. Для феномена, описанного в задаче № 15, с использованием лишь 1) фотографий рис. 8 и представленной на них информации, 2) значения экваториального радиуса Юпитера $\mathfrak{R}_J^{(e)} = 71492$ км, 3) предположения о круговых орбитах наблюдаемых спутников и 4) точных значений орбитальных скоростей спутников, представленных в таблице 6, оцените радиусы их орбит, сидерические периоды обращения. Определите абсолютную и относительную ошибку определения искомых величин с использованием точных значений, представленных в таблице 6. (14 баллов).

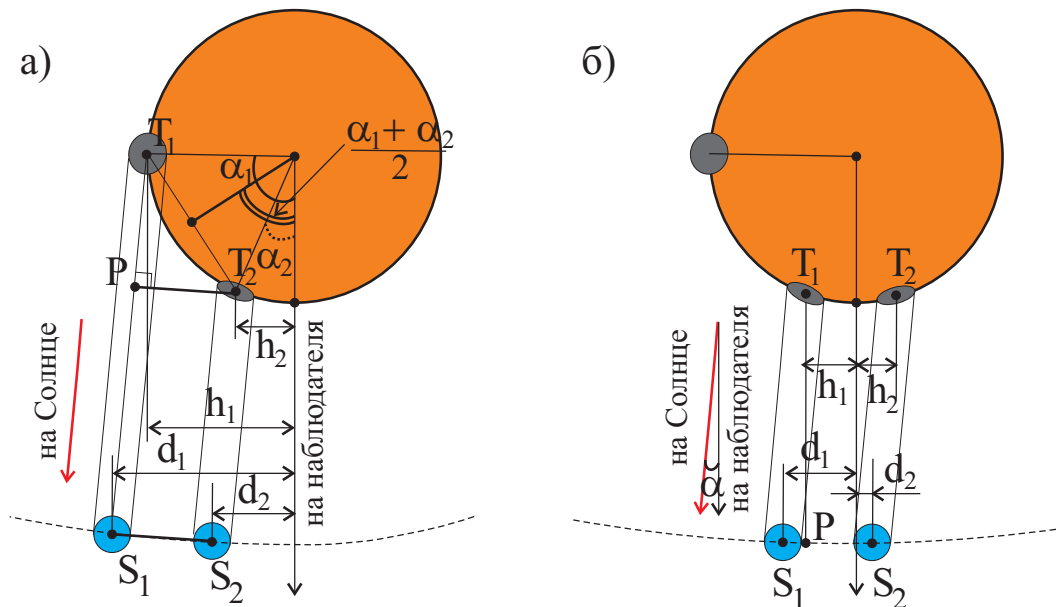


Рис. 10: к определению а) орбитальной скорости Европы, б) радиусов орбит спутников.

Решение:

Рассмотрим положение спутника S_1 на орбите (см. рис. 10.б). В данном положении он порождает тень на поверхности планеты T_1 . Земному наблюдателю, лишенному восприятия глубины изображения (в силу большой удаленности объектов), видится положение центра тени в точке P (все объекты как бы находятся в одной картинной плоскости). Треугольник $\triangle S_1 T_1 P$ является прямоугольным, следовательно для него можно записать соотношение вида:

$$\sin \alpha = \frac{S_1 P}{S_1 T_1} = \frac{d_1 - h_1}{r - \mathfrak{R}_J^{(e)}}.$$

здесь d_1, h_1 – видимые расстояния спутника и его тени соответственно от оси вращения планеты (геометрического центра планеты); r – радиус орбиты спутника; α – угол (фазовый угол) между направлением на наблюдателя и на Солнце, если смотреть из центра Юпитера. Очевидно, что данный угол является малым, на это указывает также близость даты получения фотографии к дате противостояния (7.02.2015 г). Поскольку промежуток времени между моментами получения данных фотографий $\Delta t = 42$ мин является относительно малым, то можно полагать, что данный угол один и тот же на обеих фотографиях.

Запишем выражения для $\sin \alpha$ (согласно, рис. 9) и приравняем правые части в случае 1) Каллисто и Ио по первой фотографии и 2) Европы и Каллисто по второй фотографии:

$$\frac{d_C^{(1)} + h_C^{(1)}}{r_C - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}} = \frac{h_I^{(1)} - d_I^{(1)}}{r_I - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}}, \tag{20}$$

$$\frac{d_C^{(2)} + h_C^{(2)}}{r_C - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}} = \frac{d_E^{(2)} - h_E^{(2)}}{r_E - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}}, \tag{21}$$

С другой стороны, орбитальные скорости спутников связаны с радиусами их орбит соотношениями вида (выражения следуют из второго закона, записанного для спутника, движущегося по круговой орбите):

$$r_C = \frac{G \mathfrak{M}_J}{V_C^2}, \quad r_I = \frac{G \mathfrak{M}_J}{V_I^2}, \quad r_E = \frac{G \mathfrak{M}_E}{V_C^2}, \quad \Rightarrow \tag{22}$$

$$\frac{r_C}{r_I} = \left(\frac{V_I}{V_C} \right)^2, \quad \frac{r_C}{r_E} = \left(\frac{V_E}{V_C} \right)^2. \tag{23}$$

Из систем уравнений (20), (21), (23) составим две замкнутые системы уравнений относительно радиусов орбит спутников.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_I - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)} = A_1(r_C - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}), \\ \frac{r_C}{r_I} = \left(\frac{V_I}{V_C}\right)^2 \end{array} \right\}, \text{ где } A_1 = \frac{h_I^{(1)} - d_I^{(1)}}{d_C^{(1)} + h_C^{(1)}}. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_E - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)} = A_2(r_C - \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)}), \\ \frac{r_C}{r_E} = \left(\frac{V_E}{V_C}\right)^2 \end{array} \right\}, \text{ где } A_2 = \frac{d_E^{(2)} - h_E^{(2)}}{d_C^{(2)} + h_C^{(2)}}. \quad (25)$$

Разрешая полученные системы уравнений относительно искомых величин, в результате получаем

$$r_I = \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)} \left(\frac{1 - A_1}{1 - A_1(V_I/V_C)^2} \right), \quad r_C = r_I \left(\frac{V_I}{V_C} \right)^2, \quad (26)$$

$$r_E = \bar{\mathfrak{R}}_J^{(e)} \left(\frac{1 - A_2}{1 - A_2(V_E/V_C)^2} \right), \quad r_C = r_E \left(\frac{V_E}{V_C} \right)^2. \quad (27)$$

Очевидно, что полученные результаты наиболее чувствительны к значениям орбитальных скоростей спутников, которые в прошлой задаче определены со значительной ошибкой (из-за одного измерения). Поэтому в решении данной задачи рекомендуется использовать их табличные значения (см. таблицу 6).

Далее, измеряя по фотографии геометрические параметры, в итоге получаем $h_I^{(1)} = 30.5$ мм, $d_I^{(1)} = 19$ мм, $h_C^{(1)} = 16.5$ мм, $d_C^{(1)} = 42.5$ мм, $h_C^{(2)} = 29$ мм, $d_C^{(2)} = 30$ мм, $h_E^{(2)} = 27$ мм, $d_E^{(2)} = 46.5$ мм. Затем вычисляем $A_1 = 0.1949$, $A_2 = 0.3305$. Используя значения орбитальных скоростей спутников, представленные в таблице 6, получаем $(\frac{V_I}{V_C})^2 = 4.4642$, $(\frac{V_E}{V_C})^2 = 2.8049$. В итоге, вычисленные радиусы орбит есть

$$r_I = 443002 \text{ км}, \quad r_C = 1977650 \text{ км}, \quad r_E = 655844 \text{ км}, \quad r_C = 1839578 \text{ км}.$$

ошибки определения данных величин есть:

$$\Delta r_I = |r_I - r_I^{(0)}| = 21302 \text{ км}, \quad \varepsilon_{r_I} = \frac{\Delta r_I}{r_I} \times 100\% = 5.05\%.$$

$$\Delta r_C = |r_C - r_C^{(0)}| = 94950 \text{ км}, \quad \varepsilon_{r_C} = \frac{\Delta r_C}{r_C} \times 100\% = 5.04\%.$$

$$\Delta r_E = |r_E - r_E^{(0)}| = 15056 \text{ км}, \quad \varepsilon_{r_E} = \frac{\Delta r_E}{r_E} \times 100\% = 2.24\%.$$

$$\Delta r_C = |r_C - r_C^{(0)}| = 43122 \text{ км}, \quad \varepsilon_{r_C} = \frac{\Delta r_C}{r_C} \times 100\% = 2.29\%.$$

периоды обращения спутников и ошибки их определения есть

$$T_I = \frac{2\pi r_I}{V_I} = 1.859 \text{ сут}, \quad \Delta T_I = |T_I - T_I^{(0)}| = 0.090 \text{ сут}, \quad \varepsilon_{T_I} = \frac{\Delta T_I}{T_I^{(0)}} \times 100\% = 5.05\%.$$

$$T_C = \frac{2\pi r_C}{V_C} = 17.530 \text{ сут}, \quad \Delta T_C = |T_C - T_C^{(0)}| = 0.841 \text{ сут}, \quad \varepsilon_{T_C} = \frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} \times 100\% = 5.04\%.$$

$$T_E = \frac{2\pi r_E}{V_E} = 3.471 \text{ сут}, \quad \Delta T_E = |T_E - T_E^{(0)}| = 0.080 \text{ сут}, \quad \varepsilon_{T_E} = \frac{\Delta T_E}{T_E^{(0)}} \times 100\% = 2.24\%.$$

$$T_C = \frac{2\pi r_C}{V_C} = 16.306 \text{ сут}, \quad \Delta T_C = |T_C - T_C^{(0)}| = 0.383 \text{ сут}, \quad \varepsilon_{T_C} = \frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} \times 100\% = 2.29\%.$$

Ответ: значения искомых величин представлены выше. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Тройной транзит галилеевых спутников и оценка массы, средней массовой плотности Юпитера»

Условие. Для феномена, описанного в задаче № 15, с использованием 1) наиболее точных результатов задачи № 17, 2) полярного сжатия, вычисленного в задаче № 16 и 3) предположения о круговых орбитах наблюдаемых спутников оцените массу Юпитера и его среднюю массовую плотность (полагая, что тело Юпитера – эллипсоид вращения). С использованием справочных данных для искомых величин вычислите их абсолютную и относительную ошибку определения. (15 баллов).

Решение:

При движении по круговой орбите с постоянной орбитальной скоростью на спутник должна действовать лишь центростремительная сила, которая в свою очередь, обусловлена силой всемирного тяготения, действующей со стороны центрального тела. Следовательно, второй закон Ньютона для спутника можно представить в виде:

$$m_S \frac{V_S^2}{R_S} = \frac{G m_S \mathfrak{M}_J}{R_S^2}, \Rightarrow \mathfrak{M}_J = \frac{V_S^2 \cdot R_S}{G}. \quad (28)$$

здесь $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная. Учитывая, что

$$V_S = 2\pi R_S / T_S,$$

тогда последний результат можно представить в виде:

$$\mathfrak{M}_J = \frac{4\pi^2 R_S^3}{G T_S^2}. \quad (29)$$

Используя результат (29) можно оценить массу центрального тела (Юпитера), используя лишь результаты для R_S и T_S , полученные в предыдущей задаче. В качестве таких значений возьмем результаты, полученные для Европы, поскольку они характеризуются наименьшей относительной ошибкой.

В итоге мы получаем

$$\mathfrak{M}_J = 1.855 \cdot 10^{27} \text{ кг}.$$

Учитывая, что истинное значение массы Юпитера есть $\mathfrak{M}_J^{(0)} = 1.899 \cdot 10^{27} \text{ кг}$, можно определить абсолютную и относительную погрешность результата:

$$\Delta \mathfrak{M}_J = |\mathfrak{M}_J - \mathfrak{M}_J^{(0)}| = 0.044 \cdot 10^{27} \text{ кг},$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{M}_J} = \frac{\Delta \mathfrak{M}_J}{\mathfrak{M}_J^{(0)}} \times 100\% = 2.30\%.$$

Зная массу классической планеты и ее объем (V) можно оценить среднюю массовую плотность планеты:

$$\bar{\rho} = \frac{\mathfrak{M}_J}{V}. \quad (30)$$

Согласно условию задачи, Юпитер имеет форму эллипсоида вращения, который можно охарактеризовать полярным \mathfrak{R}_p и экваториальным радиусом \mathfrak{R}_e (см. рис. 11). Объем эллипсоида вращения можно представить в виде:

$$V = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_p \mathfrak{R}_e^2 = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_e^3 (1 - k_J) = 1.426 \cdot 10^{24} \text{ м}^3. \quad (31)$$

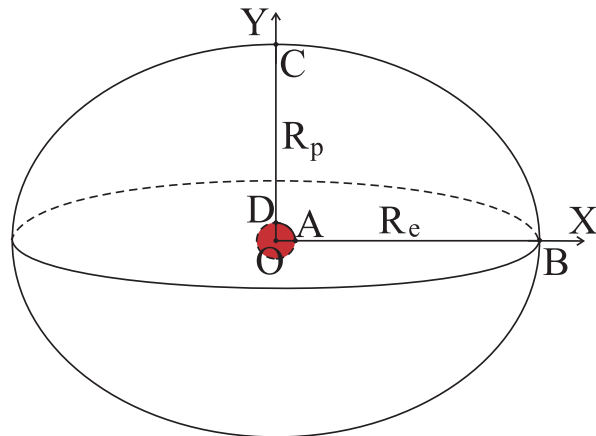


Рис. 11: к определению эллипсоида вращения Юпитера.

С использованием экваториального радиуса Юпитера (представлен в задаче № 16) и полярного сжатия, вычисленного в задаче № 16, мы получаем значение плотности

$$\bar{\rho} = 1300 \text{ кг/м}^3.$$

С учетом табличного значения плотности Юпитера $\bar{\rho}^{(0)} = 1326 \text{ кг/м}^3$, вычисляем абсолютную и относительную ошибку вычислений:

$$\Delta\bar{\rho} = |\bar{\rho} - \bar{\rho}^{(0)}| = 26 \text{ кг/м}^3, \quad \varepsilon_{\bar{\rho}} = \frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \times 100\% = 1.96\%.$$

Ответ: $\mathfrak{M}_J = 1.855 \cdot 10^{27} \text{ кг}$, $\Delta\mathfrak{M}_J = 0.044 \cdot 10^{27} \text{ кг}$, $\varepsilon_{\mathfrak{M}_J} = 2.30\%$, $\bar{\rho} = 1300 \text{ кг/м}^3$, $\Delta\bar{\rho} = 26 \text{ кг/м}^3$, $\varepsilon_{\bar{\rho}} = 1.96\%$. ($\$_{\max} = 15$ баллов).
